Continue

Sucesiones numéricas ejercicios resueltos

789 MS456–M 123×M-0.EXP÷MR±RNDC=MC To maintain ecological balance, forests play a vital role, which cannot be neglected. When a huge area of land is covered by trees, shrubs, bushes and other plants, and not used for other purposes, it is called a forest. Nowadays, due to the rapid increase in industrialization and urbanization forests are being cleared for urban land use. This practice of cutting down the trees of the forest and transforming them for other purposes is called deforestation. As deforestation has a number of ... [Read more...]One can guess a person's belongingness to a particular place before they introduce themselves easily by recognizing their race or ethnicity. Basically, these are two ways which classify people according to their characteristics, into various social groups. The race is understood as the division of human beings, depending on their biological attributes such as skin colour, built, hair, height, eye formation, etc. On the other hand, ethnicity refers to the state of being from a specific social ... [Read more...]In the business world, customers are given topmost priority. If the customer is happy and satisfied with your offering, it can do miracles for your business. Customer service is all about the customer's interaction with the company's executive at the time of seeking assistance, concerning the company's product or service. It is often contrasted with the word 'customer experience', which is a broader concept, in comparison to customer service. Customer Experience is about analysing how the ... [Read more...]In economics, Human capital refers to the skilled, educated, trained and competent people who are able to produce more human capital, which adds to the strength and wealth of a country or company, and helps in the achievement of goals timely, smoothly and effectively. On the contrary, Human Development is all about increasing the quality of human life, i.e. improvement in the lives of people, opportunities to grow and make better choices. So, human development is nothing but is the overall ... [Read more...]A number of approaches to management has been coined so far which seeks to describe the nature and content of the management with different assumptions and views. Of all the approaches developed systems approach has an upper hand over the other approaches, because of its closeness to reality. It suggests definite solutions to the problems. On the other hand, the contingency approach is an extended version of the systems approach. It relies on the assumption that there is no single way of ... [Read more...]While industrial relations is clearly associated with trade unions, collective bargaining and industrial actions. Employee relations stress on the management of the employment relationship while developing a positive psychological contract. Industrial relations and employee relations are the two common terms, which highlights a process through which people and their organization connect and communicate, at the workplace, for reason such as smooth functioning of the organization and their ... [Read more...]The word 'introduction' needs no introduction, as we all are quite familiar with it, due to its recurrent usage in our day to day life. In general sense, it implies the official presentation of one person to another. However, when it comes to submission of reports, assignments or other documents, it refers to the preliminary piece of information provided at the beginning, to have an idea of what the document contains and why it is prepared. Many of us think that executive summary is similar ... [Read more...]Programmed Decisions can be understood as, those decisions which can be taken with the help of customary or routine approach. On the other hand, Non-programmed Decisions are the ones that are taken when there is a rare or unexpected problem faced by organizations. Decision making is a tough task wherein a person has to weigh all the pros and cons of each alternative, in order to logically choose one course of action out of the various alternatives available. While making any decisions, one ... [Read more...]In economics, depreciation and devaluation of currency are the two measures of changing the relative price of imports and exports of goods. Depreciation of currency implies the drop in the market value of the domestic currency with respect to foreign currency. On the contrary, the Devaluation of currency can be understood as the government's conscious downward adjustment of the market value of the domestic currency in relation to gold and reserve currency. According to the theory of ... [Read more...]The market can be understood as the place, through which the business firm delivers value to its customers. The market can be divided into the business market, which sells goods to those entities that use it for further production or resale, and consumer market, which can be understood as the marketplace for consumers, wherein products are sold by the business entities to the consumers, for final consumption. The crucial difference between consumer market and business market is that in a ... [Read more...] Number sequence calculator is amongst the very common mathematics calculators available today. A sequence, basically, refers to some ordered list containing different objects. And, when it comes to number sequence, it contains numbers in the ordered list that follows a certain pattern. The elements of the sequence are called as terms while the length of the sequence is exactly how many terms are there in it. It can even be infinite as well. In any number sequence, the order in which the sequence goes on is very important. And, there can be several terms that can repeat in the sequence on a given pattern. Our number sequence calculator gives you access to three most commonly used sequences namely known as arithmetic, geometric and the Fibonacci sequences. All these sequences can be implemented in different mathematical disciplines because of the convergence properties that they have. In case of a convergent series, the sequence converges to a certain limit and if it doesn't that it's a divergent series. Arithmetic Sequence Calculator S No Beginning Balance Interest Principal Ending Balance Arithmetic SequenceIn arithmetic sequences, the difference between the successive terms remains the same. And if you know the first number in the sequence and the common difference, then our number sequence calculator will give you the value of any given number in the sequence as well as the sum of the sequence until that particular number. Geometric SequenceIn geometric sequences, every next number in the series after first is multiplication of previous number in the series with a non-zero, fixed number. In our number sequence calculator for geometric sequence, you have to provide the first number of the sequence, the common multiplier and the position whose value you want to find out in the series. As a result, you will not just get the value of the given number in the series as well as the sum of series up to that point. Fibonacci SequenceThe first two sequence that we have mentioned above appear to be the very simple ones. However, things get a bit complicated with the Fibonacci sequence. The sequence starts with two numbers after which every next number in the sequence is obtained by adding two numbers it is preceded by. Any Fibonacci sequence starts with either 0, 1 or 1,1 based on the starting point you choose. So, if you use our number sequence calculator for this type of a sequence, all you have to enter is the position whose value you want to find out and the result will show you the sequence itself, the number at the position you’ve entered and sum of all the numbers in the series until that position. So, use our number sequence calculator to find out the desired information about a given sequence as mentioned above. Share — copy and redistribute the material in any medium or format for any purpose, even commercially. Adapt — remix, transform, and build upon the material for any purpose, even commercially. The licensor cannot revoke these freedoms as long as you follow the license terms. Attribution — You must give appropriate credit , provide a link to the license, and indicate if changes were made . You may do so in any reasonable manner, but not in any way that suggests the licensor endorses you or your use. ShareAlike — If you remix, transform, or build upon the material, you must distribute your contributions under the same license as the original. No additional restrictions — You may not apply legal terms or technological measures that legally restrict others from doing anything the license permits. You do not have to comply with the license for elements of the material in the public domain or where your use is permitted by an applicable exception or limitation . No warranties are given. The license may not give you all of the permissions necessary for your intended use. For example, other rights such as publicity, privacy, or moral rights may limit how you use the material. Una sucesión aritmética es una lista de números con un patrón definido. Si es que tomamos un número de la sucesión y luego lo restamos por el número previo y el resultado siempre es el mismo, entonces es una sucesión aritmética. La diferencia constante en todos los pares de números consecutivos en una sucesión es llamada la diferencia común, denotada por la letra d. Usamos la diferencia común para ir de un término al otro. Si es que tomamos un término en la sucesión y sumamos la diferencia común, nos moveremos al siguiente término. Así es como los términos en una sucesión aritmética son generados. Si es que la diferencia común entre los términos es positiva, decimos que la sucesión está incrementando. Por otro lado, cuando la diferencia entre los términos es negativa, decimos que la sucesión está decreciendo. Los siguientes son dos ejemplos de sucesiones aritméticas. Observa sus diferencias comunes. Si es que queremos encontrar cualquier término (conocido como el término n) en la sucesión aritmética, podemos usar la fórmula de la sucesión aritmética para lograr esto. Lo único que tenemos que hacer es extraer o identificar valores del problema que serán sustituidos en la fórmula. Veamos las partes esenciales de la fórmula: en donde tenemos: $latex {{a}_{n}}=$ término que queremos encontrar $latex {{a}_{1}}=$ primer término en la lista ordenada de números $latex n=$ la posición del término, por ejemplo, 5 para el quinto término $latex d=$ la diferencia común de cualquier par de términos consecutivos Encuentra el siguiente término en la siguiente sucesión: 4, 7, 10, 13, 16, ? Primero, encontramos la diferencia común en cada par de números consecutivos: $latex 7-4=3$ $latex 10-7=3$ $latex 13-10=3$ $latex 16-13=3$ Dado que $latex d=3$, podemos encontrar el término que sigue después del 16 simplemente sumando 3. Entonces, tenemos $latex 16+3=19$. 4, 7, 10, 13, 16, 19 Encuentra el siguiente término en la siguiente sucesión: 29, 22, 15, 8, ? Primero, encontramos la diferencia común en cada par de números consecutivos: $latex 22-29=-7$ $latex 15-22=-7$ $latex 8-15=-7$ Dado que $latex d=-7$, podemos encontrar el término que sigue después del 8 simplemente sumando -7. Entonces, tenemos $latex 8+(-7)=1$. 29, 22, 15, 8, 1 Encuentra el término 20 en la siguiente sucesión aritmética: 3, 6, 9, 12, ... Necesitamos tres cosas para encontrar el término 20 usando la fórmula: El primer término $latex ({{a}_{1}})$ La diferencia común entre términos consecutivos $latex (d)$ La posición del término $latex (n)$ Entonces tenemos: primer término$latex ={{a}_{1}}=3$ diferencia común $latex =d=3$ posición del término $latex =n=20$ y sustituimos los valores en la fórmula: $latex {{a}_{n}}={{a}_{1}}+(n-1)d$ $latex {{a}_{20}}=3+(20-1)3$ $latex {{a}_{20}}=3+(19)3$ $latex {{a}_{20}}=3+57$ $latex {{a}_{20}}=60$ Encuentra el término 15 en la siguiente sucesión aritmética: 25, 21, 17, 13, ... Solución: Necesitamos tres cosas para encontrar el término 15 usando la fórmula: El primer término $latex ({{a}_{1}})$ La diferencia común entre términos consecutivos $latex (d)$ La posición del término $latex (n)$ Entonces tenemos: primer término$latex ={{a}_{1}}=25$ diferencia común $latex =d=-4$ posición del término $latex =n=15$ y sustituimos los valores en la fórmula: $latex {{a}_{n}}={{a}_{1}}+(n-1)d$ $latex {{a}_{15}}=25+(15-1)(-4)$ $latex {{a}_{15}}=25+(14)(-4)$ $latex {{a}_{15}}=25-56$ $latex {{a}_{15}}=-31$ Encuentra el término 22 en la siguiente sucesión aritmética: 5, 11, 17, 23, ... Necesitamos tres cosas para encontrar el término 22 usando la fórmula: El primer término $latex ({{a}_{1}})$ La diferencia común entre términos consecutivos $latex (d)$ La posición del término $latex (n)$ Entonces tenemos: primer término$latex ={{a}_{1}}=5$ diferencia común $latex =d=6$ posición del término $latex =n=22$ y sustituimos los valores en la fórmula: $latex {{a}_{n}}={{a}_{1}}+(n-1)d$ $latex {{a}_{22}}=5+(22-1)6$ $latex {{a}_{22}}=5+(21)6$ $latex {{a}_{22}}=5+126$ $latex {{a}_{22}}=131$ Una sucesión geométrica es una sucesión de números que sigue un patrón en donde el siguiente término es encontrado al multiplicar por una constante llamada la razón común r. Similar a las sucesiones aritméticas, las sucesiones geométricas también pueden incrementar o decrecer. Sin embargo, en las sucesiones geométricas, esto depende en si la razón común es mayor a 1 o menor a 1: Si es que queremos encontrar cualquier término (conocido como el término n) en la sucesión geométrica, podemos usar la fórmula de la sucesión geométrica para lograr esto. Sólo necesitamos extraer la información necesaria del problema para reemplazarla en la fórmula. Las siguientes son las partes esenciales de la fórmula: en donde tenemos: $latex {{a}_{n}}=$ término que queremos encontrar $latex {{a}_{1}}=$ primer término en la sucesión $latex n=$ la posición del término, por ejemplo, 4 para el cuarto término $latex r=$ la razón común La razón común puede ser calculada al dividir un término por el término previo: $$r=\frac{{{{a}_{n}}}}{{{{a}_{n-1}}}}$$ Encuentra el siguiente término en la siguiente sucesión: 5, 15, 45, 135, ? Primero, encontramos la razón común en cada par de números consecutivos: $latex r=\frac{15}{5}=3$ $latex r=\frac{45}{15}=3$ $latex r=\frac{135}{45}=3$ Dado que $latex r=3$, podemos encontrar el término que sigue después del 135 simplemente multiplicando por 3. Entonces, tenemos $latex 135(3)=405$. 5, 15, 45, 135, 405 Encuentra el siguiente término en la siguiente sucesión: 4, -20, 100, -500, 2500, ? Primero, encontramos la razón común en cada par de números consecutivos: $latex r=\frac{-20}{4}=-5$ $latex r=\frac{100}{-20}=-5$ $latex r=\frac{-500}{100}=-5$ $latex r=\frac{2500}{-500}=-5$ Dado que $latex r=-5$, podemos encontrar el término que sigue después del 2500 simplemente multiplicando por -5. Entonces, tenemos $latex 2500(-5)=-12500$. 4, -20, 100, -500, 2500, -12500 Encuentra el siguiente término en la siguiente sucesión: -80, 40, -20, 10, ? Primero, encontramos la razón común en cada par de números consecutivos: $latex r=\frac{40}{-80}=-0.5$ $latex r=\frac{-20}{40}=-0.5$ $latex r=\frac{10}{-20}=-0.5$ Dado que $latex r=-0.5$, podemos encontrar el término que sigue después del 10 simplemente multiplicando por -0.5. Entonces, tenemos $latex 10(-0.5)=-5$. -80, 40, -20, 10, -5 Encuentra el término 10 en la siguiente sucesión geométrica: 2, 4, 8, 16, ... Necesitamos tres cosas para encontrar el término 10 usando la fórmula: El primer término $latex ({{a}_{1}})$ La razón común entre términos consecutivos $latex (r)$ La posición del término $latex (n)$ Entonces tenemos: primer término$latex ={{a}_{1}}=2$ razón común $latex =r=\frac{4}{2}=2$ posición del término $latex =n=10$ y sustituimos los valores en la fórmula: $latex {{a}_{n}}={{a}_{1}}\left({{{r}^{n-1}}} \right)$ $latex {{a}_{10}}=2\left({{{2}^{10-1}}} \right)$ $latex {{a}_{10}}=2\left({{{2}^{9}}} \right)$ $latex {{a}_{10}}=2(512)$ $latex {{a}_{10}}=1024$ Encuentra el término 6 en la siguiente sucesión geométrica: 3, 12, 48, 192, ... Necesitamos tres cosas para encontrar el término 6 usando la fórmula: El primer término $latex ({{a}_{1}})$ La razón común entre términos consecutivos $latex (r)$ La posición del término $latex (n)$ Entonces tenemos: primer término$latex ={{a}_{1}}=3$ razón común $latex =r=\frac{12}{3}=4$ posición del término $latex =n=6$ y sustituimos los valores en la fórmula: $latex {{a}_{n}}={{a}_{1}}\left({{{r}^{n-1}}} \right)$ $latex {{a}_{6}}=3\left({{{4}^{6-1}}} \right)$ $latex {{a}_{6}}=3\left({{{4}^{5}}} \right)$ $latex {{a}_{6}}=3(1024)$ $latex {{a}_{6}}=3072$ Encuentra el término 6 en la siguiente sucesión geométrica: -2400, 1200, -600, 300, ... Necesitamos tres cosas para encontrar el término 6 usando la fórmula: El primer término $latex ({{a}_{1}})$ La razón común entre términos consecutivos $latex (r)$ La posición del término $latex (n)$ Entonces tenemos: primer término$latex ={{a}_{1}}=-2400$ razón común $latex =r=\frac{1200}{-2400}=-0.5$ posición del término $latex =n=6$ y sustituimos los valores en la fórmula: $latex {{a}_{n}}={{a}_{1}}\left({{{r}^{n-1}}} \right)$ $latex {{a}_{6}}=-2400\left({{{-0.5}^{6-1}}} \right)$ $latex {{a}_{6}}=-2400\left({{{-0.5}^{5}}} \right)$ $latex {{a}_{6}}=-2400(-0.03125)$ $latex {{a}_{6}}=75$ ¿Interesado en aprender más sobre otros temas algebraicos? Mira estas páginas: En una progresión aritmética, sabemos que el sexto término es 28 y que la diferencia es 5. Calcular el término general y los 5 primeros términos. SOLUCIÓN Conocemos el término 6-ésimo y la diferencia: Queremos calcular el término general de la sucesión, \(a_n\), que sabemos que es de la forma $$ a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$ Como la diferencia es \(d = 5\), tenemos Necesitamos calcular el primer término de la sucesión, \(a_1\). Para ello, aplicamos la fórmula para el caso \(n = 6\) ya que sabemos que \(a_6 = 28\). Sustituimos en la fórmula: Por tanto, el término general de la sucesión aritmética es Los cinco primeros términos son Nota: hemos calculado los términos aplicando la fórmula obtenida, pero una vez sabemos que el primer término es 3 y que la diferencia es 5, podemos obtener fácilmente los términos sumando la diferencia. Problema 2 En una progresión geométrica, sabemos que el primer término es 6 y el cuarto es 48. Calcular el término general y la suma de los 5 primeros términos. SOLUCIÓN Conocemos el primer y el cuarto término: Como la progresión es geométrica, su fórmula general es de la forma De dicha fórmula conocemos el término \(a_1\), pero no conocemos la razón, \(r\). Para calcularla, aplicamos la fórmula para el caso \(n=4\) porque sabemos que \(a_4 = 48\): Por tanto, la razón es \(r = 2\) y el término general es Para calcular la suma de los 5 primeros términos, aplicamos la fórmula. Necesitaremos calcular el término \(a_5\): Problema 3 Encontrar el término general de la sucesión 20, 19.3, 18.6, 17.9, ... ¿Es aritmética o geométrica? Encontrar los términos: décimo (10), vigésimo (20) y trigésimo (30). SOLUCIÓN Si la sucesión es aritmética, entonces la diferencia entre dos términos consecutivos siempre es la misma. Buscamos la diferencia: Se trata de una sucesión aritmética con diferencia d = -0.7 (es una sucesión decreciente, d < 0). Por tanto, el término general es Aplicando dicha fórmula podemos calcular los terminos décimo, vigésimo y trigésimo: Problema 4 Encontrar el término general de la sucesión 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625,... ¿Es aritmética o geométrica? Calcular los términos n- ésimos para los valores de n = 10, 100. Se sabe que la suma de los infinitos términos de esta sucesión es 1 (ejercicio 26). Razonar cómo es posible que la suma de infinitos términos positivos no sea infinita. SOLUCIÓN Buscamos la diferencia: Como los valores no coinciden, la sucesión no es aritmética. Buscamos la razón: Se trata de una sucesión geométrica de razón r = 0.5 (decreciente puesto que r < 1). Como conocemos el primer término y la razón, el término general es Así, podemos calcular los términos 10-ésimo y 100-ésimo: Observamos que los términos de la sucesión son muy pequeños: el décimo tiene tres ceros detrás de la coma y el centésimo, tiene treinta. Aunque los términos de la sucesión son positivos, éstos son cada vez más pequeños y muy próximos a 0. De este modo, al sumarlos, a penas incrementa el valor, aunque sumemos infinitos números. Problema 5 En una progresión aritmética, sabemos que el primer término es 1 y la suma de los 10 primeros términos es 63. Calcular el término general. SOLUCIÓN Conocemos el primer término y la suma de los diez primeros términos: Utilizaremos las fórmulas del término general y de la suma (de una progresión aritmética) para poder calcular la diferencia, \(d\). Dichas fórmulas son: Hemos escrito en las fórmulas \(a_1 = 1\). Sustituimos los datos conocidos: Podemos sustituir \(a_{10}\) en la primera fórmula: De la ecuación resultante obtenemos d: Luego la diferencia es \(d = 53/45\) y el término general es Problema 6 En una progresión aritmética finita, el segundo término es -23 y el último 32. Si se sabe que hay 12 términos, calcular el término general. SOLUCIÓN Conocemos el segundo término y el duodécimo: Por ser aritmética, sabemos que la fórmula general de la misma es de la forma Con los datos que conocemos, podemos construir un sistema de ecuaciones para calcular el primer término y la diferencia: Resolvemos el sistema por el método de igualación: Por tanto, el término general es Nota: hemos indicado los valores que puede tomar n ya que la sucesión es finita. Problema 7 La suma de tres términos consecutivos de una sucesión aritmética cuya diferencia es 11 vale 66. Encontrar dichos términos. SOLUCIÓN Como la diferencia de la sucesión es 11, la diferencia entre términos consecutivos es 11. Entonces, si uno de los términos es \(x\), su consecutivo es \(x+11\) y el consecutivo de éste es \(x+11+11\). Sabemos que los 3 términos consecutivos han de sumar 66, así que tenemos Es decir, tenemos una ecuación de primer grado cuya solución es 11: Luego los números son 11, 22, 33. La ecuación la podemos expresar en términos de una progresión como es decir, como la suma de los tres primeros términos de una progresión cuyo término general es Problema 8 La suma de n números naturales consecutivos a partir de 55 (sin incluirlo) vale 738. Encontrar n. SOLUCIÓN El enunciado nos dice que Así, \(n\) es el número de sumandos a la izquierda de la igualdad. Podemos expresar la ecuación anterior como Es decir, En realidad, el interior del paréntesis es la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética con diferencia 1 y cuyo primer término es 1, esto es Por tanto, podemos reescribir la ecuación como Tenemos entonces una ecuación segundo grado cuyas soluciones son n = -123, 12. Como n representa la cantidad de sumandos, ha de ser un número natural (entero positivo), de modo que n = 12. Problema 9 La suma de 6 números impares consecutivos vale 120. Encontrar dichos números. SOLUCIÓN Un número impar es de la forma Si el más pequeño de los 6 números impares es \(2k+1\), sus consecutivos se obtienen sumando \(2\). Por tanto, buscamos la \(k\) que cumple Simplificando, El interior del paréntesis es la suma de los 6 primeros términos de una sucesión aritmética de diferencia 2 y que empieza en 1, es decir, Por tanto, Los números son 15, 17, 19, 21, 23, 25. Problema 10 Demostrar que en cualquier sucesión geométrica positiva, cada término es la raíz cuadrada del producto de su término anterior por su término siguiente. Es decir, $$ a_n = \sqrt{a_{n-1}\cdot a_{n+1}}$$ SOLUCIÓN El término general de una sucesión geométrica es y queremos demostrar que Para demostrarlo, calculamos \(a_{n-1}\) y \(a_{n+1}\) usando el término general: $$a_{n-1} = a_1 r^{n-1-1} = a_1 r^{n-2} $$ $$a_{n+1} = a_1 r^{n+1-1} = a_1 r^{n} $$ y sustituimos en el radicando. Quedará demostrado al obtener que dicha raíz es justamente el término \(a_n\): Observaciones: Hemos aplicando las propiedades de las potencias para simplificar. La exigencia de que la sucesión sea positiva es porque, de este modo, la raíz cuadrada de \(a_1^2\) es \(a_1\) y no su valor absoluto. Como la sucesión es positiva, su razón también lo es. Por ello, tampoco escribimos el valor absoluto al simplificar la raíz de \(r^{2(n-1)}\). Problema 11 Una progresión geométrica comienza en 1 y tiene razón 2. Encontrar los tres términos consecutivos (de la sucesión) cuyo producto es 512. SOLUCIÓN El término general de la progresión es No sabemos la posición que ocupan los tres términos, pero sí sabemos que son consecutivos. Por tanto, si el primero de ellos es \(a_n\), los otros dos son \(a_{n+1}\) y \(a_{n+2}\). Entonces, utilizando el término general, el producto de dichos términos es Por tanto, los términos son el tercero, el cuarto y el quinto: 4, 8, 16. Problema 12 Encontrar el término general de la sucesión 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... ¿Es aritmética o geométrica? SOLUCIÓN Comprobamos si es aritmética restando términos consecutivos: No lo es puesto que las diferencias no coinciden. Comprobamos si es geométrica dividiendo términos consecutivos: No lo es puesto que la razón no es la misma. Luego la progresión no es ni aritmética ni geométrica. Tendremos que deducir por nuestra cuenta cuál es el término general. Lo primero que hacemos es fijarnos en la relación entre la posición de cada término y su valor: Por tanto, deducimos que el término general es No es una progresión aritmética ni geométrica. En esta sucesión no podemos utilizar la fórmula que conocemos para sumar \(n\) términos. Problema 13 Encontrar el término general de la sucesión 1, 4, 27, 256, 3125, ... ¿Es aritmética o geométrica? SOLUCIÓN Comprobamos si es aritmética: No lo es. Comprobamos si es geométrica: No lo es. Nos fijamos en la relación entre la posición de cada término y su valor: Por tanto, deducimos que el término general es No es una progresión aritmética ni geométrica. Problema 14 Encontrar el término general de la sucesión 1, -2, 4, -8, 16,... ¿Es aritmética o geométrica? SOLUCIÓN Comprobamos si es aritmética: No lo es. Comprobamos si es geométrica: Por tanto, es geométrica con razón r = -2 y, por tanto, su término general es Como la razón es negativa, la sucesión es alternada. Esto implica que cada término tiene un signo distinto. En esta sucesión en particular, los términos de posición par son negativos y los otros son positivos. Problema 15 Calcular la suma de los tres primeros términos de una sucesión geométrica de razón 0.5 sabiendo que su producto es 1000. SOLUCIÓN Como la sucesión es geométrica y conocemos la razón, el término general es $$ a_n = a_1\cdot 0.5^{n-1} $$ Sabemos que el producto de los tres primeros términos es 1000. Dicho matemáticamente, $$ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1000 $$ Sustituimos \(a_1\), \(a_2\) y \(a_3\) de la expresión anterior por el término general con \(n=1\), \(n=2\) y \(n=3\), respectivamente: $$ 1000 = a_1\cdot (a_1 \cdot 0.5)\cdot (a_1\cdot 0.5^2) $$ Con lo que obtenemos la ecuación $$ 1000 = a_1 ^3 \cdot 0.5^3$$ Esta ecuación nos proporciona el primer término: Por tanto, la sucesión es 20, 10, 5,... y la suma de los tres primeros términos es 35. Problema 16 Considérese la sucesión dada por recurrencia Calcular los términos que sean necesarios para poder deducir su término general. SOLUCIÓN Aplicaremos la fórmula dada para calcular, uno a uno, los primeros términos de la sucesión: Luego la sucesión es 1, 3, 5, 7, 9, 11,... que es la sucesión de los números impares. Por tanto, su término general es Se trata de una sucesión aritmética de diferencia d = 2. Nota: al expresar la sucesión por recurrencia, para calcular el término \(n+1\)-ésimo se necesita calcular previamente todos términos que le preceden: para calcular \(a_{n+1}\) hacen falta \(a_{n}\) y \(a_{n-1}\), pero para calcular \(a_{n}\) hacen halta \(a_{n-1}\) y \(a_{n-2}\) y, así, sucesivamente hasta \(a_1\). No ocurre lo mismo con el término general. Ahora bien, para algunas sucesiones no se puede encontrar una fórmula del término general. Problema 17 El sueldo de un trabajador es de 950€ mensuales y cada año se incrementa en 50€ (cada mes). Calcular cuánto dinero ganará en los 10 años siguientes. SOLUCIÓN Construimos una sucesión cuyo término n-ésimo es el sueldo mensual en el año n-ésimo: En el primer año, el sueldo mensual es de 950. En el segundo año, el sueldo mensual es de 1000. En el tercero, 1050. Luego la sucesión es Se trata de una progresión aritmética con diferencia d = 50. En total, en el año n-ésimo el sueldo es 12·an porque hay 12 meses en un año y cada término representa el sueldo mensual. Por tanto, debemos multiplicar por 12 la suma de los 10 primeros términos: En 10 años, la cifra asciende a 12·11750 = 141000€. Problema 18 Calcular la suma de todos los números impares comprendidos entre 100 y 200. SOLUCIÓN Construimos la progresión formada por dichos números: Hemos usado k porque no sabemos qué posición ocupa el último término. Es una progresión aritmética con diferencia d = 2 y con término general Buscamos la posición del último término: Resolvemos la ecuación y obtenemos k = 50. Por tanto, la suma será Problema 19 Demostrar que la suma de los n primeros impares es n2. SOLUCIÓN Consideremos la sucesión de los números impares Es una sucesión aritmética con diferencia d = 2. Queremos calcular la suma de los n primeros términos, es decir, Problema 20 En una progresión aritmética, la suma de los dos primeros términos es 12 y la suma del primero con el tercero es 30. Hallar el término general y calcular la suma de los cinco primeros términos. SOLUCIÓN Como la progresión es aritmética, el término general es Tenemos los datos: Resolvemos el sistema de ecuaciones obteniendo el primer término y la diferencia: Luego el término general es Y la suma de los cinco primeros es Problema 21 Calcular el valor del parámetro a para que los números a+2, 3a+2, 9a-2 sean los tres primeros términos de una progresión geométrica. Ver solución Para que formen una progresión geométrica de razón r se tiene que cumplir Como la razón debe ser constante, igualamos ambas expresiones y así obtenemos a: La sucesión es 4, 8, 16,... y tiene razón r = 2. En un cuadrado de lado 2 se unen los puntos medios de sus lados para obtener otro cuadrado inscrito. Se repite el proceso sucesivamente con los cuadrados obtenidos: Calcular la sucesión cuyo término n-ésimo corresponde con la longitud del lado del cuadrado n-ésimo. ¿Qué tipo de sucesión es? Ver solución Utilizaremos el teorema de Pitágoras (h 2 = a 2 + b 2) para calcular los lados. El lado del cuadrado inicial mide 2.El lado del primer cuadrado mide El lado del segundo cuadrado mide El lado del tercer cuadrado mide El lado del cuarto cuadrado mide Tenemos la sucesión Es una sucesión geométrica puesto que la razón entre términos consecutivos se mantiene constante: Por tanto, el término general es Calcular un número sabiendo que sus cinco cifras están colocadas en progresión aritmética, que la suma de todas ellas es 20 y que la primera es el doble de la tercera. Ver solución Representamos el numero como El término general de la sucesión que proporciona las cifras es el de una sucesión aritmética: De la suma de todas las cifras y de la relación existente entre la primera y la tercera obtenemos las siguientes ecuaciones: Tenemos el sistema de ecuaciones cuya solución es La sucesión es 8,6,4,2,0,... Y, por tanto, el número buscado es x = 86420. Calcular la suma de los múltiplos de 13 comprendidos entre los números 500 y 7800 inclusive. Ver solución Consideremos la sucesión aritmética formada por los múltiplos de 13: Obsérvese que se trata de una sucesión aritmética con diferencia 13. Buscamos el primer término que sea mayor o igual que 500: Por tanto, el primer múltiplo de 13 y mayor o igual que 500 es Ahora buscamos el último múltiplo de 13, que debe cumplir Es decir, es el término Calculamos la suma de todos los términos: donde hemos usado la fórmula de la suma de las progresiones aritméticas, siendo 562 el número de términos que hemos sumado. Los dos primeros términos de una progresión aritmética son a1 = (a - b)2 y a2 = (a + b)2. Calcular la diferencia de la progresión y la suma de los 5 primeros términos. Ver solución Como forman parte de una progresión aritmética, si la diferencia es d, sabemos que el segundo término es Desarrollamos los cuadrados y calculamos la diferencia d: El término general es La suma de los 5 primeros términos es Demostrar que la suma infinita de la sucesión es 1 con la ayuda del siguiente diagrama que representa un cuadrado de lado 1. Ver solución Calculamos los primeros términos de la sucesión: Como el lado del cuadrado es 1, su área es 1. Así pues, el área de la mitad del cuadrado es 1/2. El área de la mitad de esta mitad es 1/4. Y así, sucesivamente: Es decir, las áreas de los cuadrados o rectángulos que se obtienen al dividir por la mitad son los términos de la sucesión. Para infinito, habremos recubierto el cuadrado completo, que tiene área 1. Por tanto, la suma de todos los términos de la sucesión es 1. Así que Demostrar que la suma infinita de la progresión geométrica es 1 con la ayuda del siguiente diagrama de cuadrados de lado 1 en los que el área amarilla del n-ésimo cuadrado vale lo mismo que el término n-ésimo de la progresión. Ver solución El área total del cuadrado es 1. Por tanto, el área amarilla del primer cuadrado es ya que el lado de los cuatro cuadrados es 1/2. En el segundo cuadrado, el lado de los cuatro cuadrados pequeños es la mitad del lado de los cuatro cuadrados grandes, es decir, 1/4. Por tanto, el área amarilla es En el tercer cuadrado, el lado de los cuatro cuadrados pequeños es la mitad del lado de los cuatro cuadrados intermedios, es decir, 1/8. Por tanto, el área amarilla es Si sumamos todos los términos de la sucesión tendremos el área total del cuadrado, que es 1. Así que Nota: obsérvese que El término general de la sucesión geométrica es $$a_n =\frac{3}{2^{2n}}$$ El primer término es \(a_1 = 3/4\) y la razón es \(r= 1/4\). Aplicando la fórmula de la suma de todos los términos tenemos $$ S_\infty = \frac{a_1}{1-r} =$$ $$ = \frac{3/4}{1-1/4} = 1 $$ Según una leyenda, un rico brahmán ordenó a su sirviente, Sisa, que creara un juego para que pudiera entretenerse. Sisa le presentó el tablero de ajedrez y el brahmán quedó tan satisfecho que le dejó escoger su recompensa. Así pues, le pidió que le pagara con un grano de trigo por el primer casillero del tablero, dos por el segundo, cuatro por el tercero, ocho por el cuarto, etc. hasta llegar a los 64 casilleros. Calcular a cuántos granos de trigo ascendía la recompensa. Si en un 1kg hay aproximadamente 20.000 granos, ¿cuántos kilogramos de trigo obtuvo Sisa? Ver solución El número de granos en cada casillero corresponde con la los términos de la progresión geométrica Queremos calcular la suma de los 64 primeros términos. Como la razón es r = 2 y el último término es \(a_{64}\), Aplicando una regla de 3, la recompensa asciende a unos 922 337 203 685 477 kg de trigo. A las 9 de la mañana, una persona cuenta a tres amigos un secreto. Media hora después, cada uno de estos tres amigos cuenta el secreto a otras tres personas. Media hora más tarde, cada uno de éstos cuenta el secreto a otras tres personas y así sucesivamente. Calcular cuántas personas saben el secreto a las 9 de la noche suponiendo que cada persona sólo cuenta el secreto a otras tres personas y a nadie más durante el día y que ninguno ha recibido la información varias veces. Ver solución Construimos una sucesión en la que cada término será el número de personas nuevas que conocen el secreto: Es una sucesión geométrica de razón r = 3. Cada media hora se extiende el secreto y el tiempo total son 12h, es decir, 24 medias horas. Entonces, queremos calcular la suma de los 24 primeros términos: Es decir, lo sabría el mundo entero ya que en el mundo hay unos 8.000 millones de personas (cifra del 2023). Encontrar el valor de n para que se cumpla la igualdad Ver solución Consideremos la progresión geométrica de razón 2 y cuyo primer término es 1. Su término general es buscamos n tal que Como la razón es r = 2, Finalmente, resolvemos la ecuación exponencial Las sucesiones son un tema crucial en matemáticas que se utiliza en diversas aplicaciones, desde la teoría de números hasta el diseño de algoritmos en informática. Comprender las sucesiones aritméticas y cómo resolver ejercicios de sucesiones es esencial para cualquier estudiante que desee profundizar en las matemáticas. Además, abordaremos distintas estrategias para solucionar ejercicios de sucesiones aritméticas, identificando errores comunes que se suelen cometer y proporcionando soluciones detalladas. La intención es que a través de este artículo, los lectores puedan familiarizarse con las sucesiones y mejorar su habilidad en el abordaje de ejercicios de sucesiones. ¿Qué son las sucesiones? Una sucesión es una lista ordenada de números que se presenta de manera secuencial. La sucesión puede ser infinita o finita, dependiendo de la cantidad de términos que contenga. Dentro de las sucesiones, hay dos tipos principales: las sucesiones aritméticas y las sucesiones geométricas. El estudio de las sucesiones aritméticas se centra en la existencia de una diferencia constante entre cada uno de los términos de la secuencia. Tipos de sucesiones: Aritméticas y Geométricas Sucesiones Aritméticas Una sucesión aritmética es aquella en la que la diferencia entre cualquier par de términos consecutivos es constante. Esta diferencia se denomina diferencia común (d) y puede ser positiva, negativa o cero. Si la diferencia es positiva, la sucesión es creciente; si es negativa, es decreciente; y si es cero, todos los términos son iguales. Sucesiones Geométricas Por otro lado, una sucesión geométrica es aquella donde cada término se obtiene multiplicando el término anterior por un número fijo, llamado razón (r). A diferencia de las sucesiones aritméticas, las sucesiones geométricas no tienen una diferencia constante, sino un cociente constante entre los términos. Características de las Sucesiones Aritméticas Las sucesiones aritméticas tienen varias características que las definen, entre las cuales destacan: Diferencia Común: Como se mencionó anteriormente, la diferencia entre términos consecutivos es constante. Forma General: La forma general de la n-ésima término se expresa como (a_n = a_1 + (n-1)d). Representación Gráfica: Al graficar los términos de una sucesión aritmética, se observa que los puntos se distribuyen en línea recta. Fórmula General de una Sucesión Aritmética La fórmula general para calcular el n-ésimo término ((a_n)) de una sucesión aritmética es: (a_n = a_1 + (n-1)d) Donde: a_n es el n-ésimo término que queremos encontrar. a_1 es el primer término conocido de la sucesión. d es la diferencia común. n es la posición del término en la sucesión. Ejemplos Resueltos de Sucesiones Aritméticas Para que se pueda entender mejor cómo funcionan las sucesiones aritméticas, a continuación presentamos algunos ejemplos resueltos de ejercicios de sucesiones aritméticas. Ejemplo 1 Encuentra el 10º término de la sucesión aritmética donde el primer término (a_1 = 3) y la diferencia común (d = 5). Utilizando la fórmula, tenemos: (a_{10} = 3 + (10-1)5 = 3 + 45 = 48) Así que el 10º término es 48. Ejemplo 2 Si en una sucesión aritmética el primer término es 20 y la diferencia común es -4, determina el 5º término. Aplicando la fórmula, tenemos: (a_5 = 20 + (5-1)(-4) = 20 – 16 = 4) Por lo tanto, el 5º término es 4. Ejercicios Prácticos para Resolver Ahora que hemos visto algunos ejemplos resueltos, es momento de poner a prueba tus habilidades con ejercicios de suces